УДК 539.125.523

ЗАДАЧА О ПЛОТНОСТИ НЕЙТРОНОВ С ИЗОТРОПНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Н.А. Черников

В данной работе, взятой из авторского архива, решена задача о плотности нейтронов, создаваемых в пустом евклидовом пространстве изотропным источником нейтронов. Предполагается, что взаимодействием нейтронов с веществом, а также столкновениями нейтронов друг с другом можно пренебречь. Работа выполнена автором в бытность его студентом четвертого курса физико-технического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова и была доложена в 1950 году на семинаре И.Я.Померанчука в Лаборатории А.И.Алиханова. Публикуется впервые.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

A Problem about the Neutron Density with an Isotropic Source

N.A.Chernikov

In this paper, taken from the authors archive, a problem has been solved about the neutron density, created by an isotropic source in an empty Euclidean space. It has been assumed that the neutron-matter interaction and the neutron-neutron collisions can be neglected. This paper had been written by the author, while he was a fourth-year student in the Physics Technical Faculty of Lomonosov's Moscow State University. It was reported in 1950 on Pomeranchuk's seminar in Alikhanov's Laboratory and is published for the first time.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Пусть в евклидовом пространстве задан изотропный источник нейтронов $q(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = Q(t, \mathbf{r}, v)$. Требуется найти плотность нейтронов $N(t, \mathbf{r}, v)$, создаваемых этим источником, считая, что взаимодействием нейтронов с веществом и их столкновениями друг с другом можно пренебречь. Здесь t — время, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — радиус-вектор и вектор скорости нейтрона.

Найдем сначала функцию распределения $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ нейтронов по координатам и скоростям. По определению, $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}$ — это есть число нейтронов в момент времени t, для которых $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ заключены в пределах $d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}$. Искомая плотность нейтронов $N(t, \mathbf{r}, v)$ равна интегралу по сфере радиуса v в пространстве скоростей от функции распределения, то есть

$$N(t,\mathbf{r},v) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} n(t,\mathbf{r},v_1,v_2,v_3)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

где

$$v_1 = v\sin\theta\cos\varphi,\ v_2 = v\sin\theta\sin\varphi,\ v_3 = v\cos\theta.$$

Точнее, $N(t,\mathbf{r},v)$ — пространственно-энергетическая плотность нейтронов, что в данном случае несущественно, так как модуль скорости v выступает здесь в качестве параметра. В свою очередь, источник $q(t,\mathbf{r},\mathbf{v})$ определяется таким образом, что число нейтронов, доставляемых им в единицу времени t в пределы $d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}$, равняется $q(t,\mathbf{r},\mathbf{v})\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}$. В условиях данной задачи функция распределения и источник связаны следующим кинетическим уравнением (см. [1] и [2]):

$$[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\,\mathrm{grad} + \frac{1}{T(v)}]\, n(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) = q(t,\mathbf{r},\mathbf{v}),$$

где $T^{-1}(v)$ — вероятность распада нейтрона в единицу времени. На самом деле эта вероятность не зависит от v, так что $T(v) = T_0$, но мы сохраняем далее произвольную зависимость от v, чтобы иметь возможность постановку данной задачи потом немного усложнить. Так как производная по τ функции

$$f(\tau) = n(t-\tau,\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau,\mathbf{v})\exp\{-\frac{\tau}{T(v)}\}$$

равна

$$\frac{d}{d\tau}f(\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}[n(t-\tau,\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau,\mathbf{v})\exp\{-\frac{\tau}{T(v)}\}] =$$

$$= -\{[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\,\mathrm{grad} + \frac{1}{T(v)}]n(t-\tau,\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau,\mathbf{v})\}\exp\{-\frac{\tau}{T(v)}\},$$

то в силу приведенного выше кинетического уравнения имеем

$$\frac{d}{d\tau}f(\tau) = -\{q(t-\tau,\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau,\mathbf{v})\}\exp\{-\frac{\tau}{T(v)}\}.$$

Следовательно,

$$f(0) - f(\tau) = \int_0^\tau q(t-\tau',\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau',\mathbf{v})\exp\{-\frac{\tau'}{T(v)}\}d\tau',$$

причем по определению функции $f(\tau)$ имеем

$$f(0) = n(t,\mathbf{r},\mathbf{v}).$$

Предположим теперь, что поток нейтронов из бесконечности равен нулю. Это значит, что

$$\lim_{\tau\to\infty} n(t-\tau,\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau,\mathbf{v}) = 0.$$

При этом условии вследствие наличия в $f(\tau)$ экспоненциального множителя, мажорируемого (при $\tau > 0$) единицей, заведомо и

$$\lim_{\tau\to\infty} f(\tau) = 0.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае функция распределения нейтронов равна следующему однократному интегралу:

$$n(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int\limits_0^\infty q(t-\tau, \mathbf{r}-\mathbf{v}\tau, \mathbf{v}) \exp\{-\frac{\tau}{T(v)}\} d\tau.$$

Отсюда, ввиду изотропности источника, находим, что искомая плотность нейтронов равна следующему тройному интегралу:

$$N(t, r, v) = \int\limits_0^\infty \int\limits_o^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} Q(t-\tau, \mathbf{r}-\mathbf{v}\tau, v) \exp\{-\frac{\tau}{T(v)}\} \sin\theta\, d\tau\, d\theta\, d\varphi.$$

Переходя от переменных интегрирования τ, θ, φ к переменным

$$x' = x - v_1\tau,\ y' = y - v_2\tau,\ z' = z - v_3\tau,$$

находим якобиан

$$\frac{\partial(x', y', z')}{\partial(\tau, \theta, \varphi)} = -v^3\tau^2 \sin\theta.$$

Затем, заметив, что $v\tau = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, получаем решение задачи в виде

$$N(t, x, y, z, v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(t', r', v) \exp\{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{vT(v)}\} \frac{dx'dy'dz'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2},$$

где

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}.$$

Именно этот результат я и ожидал получить из "физических соображений". Интересно сравнить его с решением в [2] и [3] задачи о критических размерах системы при реакции на быстрых нейтронах. Постановку задачи можно усложнить. Например, можно считать, что пространство заполнено веществом так, что атомные ядра вещества можно считать покоящимися, а их плотность ρ можно считать независящей от $\mathbf{r}$ и t. В таком случае сечение σ захвата нейтрона ядром и длина L свободного пробега нейтронов зависят только от модуля скорости нейтрона $v : \sigma = \sigma(v),\ L = L(v) = [\sigma(v)\rho]^{-1}$. Если считать, что после столкновения падающего нейтрона с ядром вещества нейтроны из компаунд-ядра не вылетают, то усложненная таким образом задача сводится к исходной, где надо положить

$$[T(v)]^{-1} = [T_0]^{-1} + v\sigma(v)\rho.$$

Тогда, в 1950 году, я еще не знал, как писать релятивистское кинетическое уравнение, и потому решил задачу в нерелятивистском варианте. О более поздних публикациях на эту тему в нерелятивистском варианте см. [4]. В релятивистском варианте данная задача будет рассмотрена в следующей работе автора.

Литература

1. Marshak R.E. — Reviews of Modern Physics, 1947 v. 19, p.185.
2. Ахиезер А., И.Померанчук И. — Некоторые вопросы теории ядра. М. – Л.: Гостехиздат, 1948, а также издание второе, 1950.
3. Peierls R. — Critical Conditions in Neutron Multiplication. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1939, v.35, p.610.
4. Смелов В.В. — Лекции по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1978.

Рукопись поступила 28 апреля 1999 года.